

15/2
/2023

Tugas 2 Aljabar 1

Nama, NRP : M. Febryan Khamim (5002221072)
Nama Matrikul : Aljabar 1 (KM184402)
Tanggal Deadline : 22 Februari 2023

- 1). Misalkan $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Tunjukkan bahwa G adalah Subgrup dari $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan!

Jawab =

Karena $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, maka $G \subseteq \mathbb{R}$

Syarat G adalah grup :

- ✓1. Tertutup. Iya, karena ketika $(a_1 + a_2)$ dan $(b_1 + b_2)$ dioperasikan serta $a, b \in \mathbb{Q}$, maka $(a_1 + a_2)$ dan $(b_1 + b_2)$ adalah $\in \mathbb{Q}$.
- ✓2. Asosiatif. Ketika $A * (B * C) = (A * B) * C$, maka operasi tersebut asosiatif.
 $(a_1 + b_1\sqrt{2}) + [(a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_3 + b_3\sqrt{2})] = [(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})] + (a_3 + b_3\sqrt{2})$, hasilnya
 $[(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt{2}]$
- ✓3. Memiliki Identitas. Karena $a, b \in \mathbb{Q}$; Ketika $a = 0$ dan $b = 0$ maka :
 $(0 + 0\sqrt{2}) = 0$. Karena Nol merupakan identitas penjumlahan, maka G punya elemen identitas
- ✓4. Punya Invers. Misal terdapat A , maka Inversnya adalah $-A$. Contoh :
 $(a_1 + b_1\sqrt{2}) + -(a_1 + b_1\sqrt{2}) = (a_1 - a_1) + (b_1 - b_1)\sqrt{2} = 0$
 $-(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2}) = (-a_1 + a_1) + (-b_1 + b_1)\sqrt{2} = 0$

Sehingga, G adalah grup dan $G \subset \mathbb{R}$ pada operasi penjumlahan

- 2). Untuk $\theta \in \mathbb{R}$, misalkan $A(\theta) \in SL(2, \mathbb{R})$ adalah matriks representasi dari Suatu rotasi θ rad.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- (a). Tunjukkan bahwa $H = \{A(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ adalah suatu subgrup dari $SL(2, \mathbb{R})$.
- (b). Dapatkan Invers dari $A(2\pi/3)$
- (c). Dapatkan order dari $A(2\pi/3)$

Jawab :

- (a). Karena $A(\theta) \in SL(2, \mathbb{R})$, maka H subgrup dari $SL(2, \mathbb{R})$ dibuktikan :
 ambil $A, B \in H$, maka berlaku :

$$\begin{aligned} \det(AB^{-1}) &= \det(A) \cdot \det(B^{-1}) \\ &= \det(A) \cdot \frac{1}{\det B} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \det A(\theta) &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1 \end{aligned} \right.$$

Jadi $AB^{-1} \in H$ dan

$$H \leq SL(2, \mathbb{R})$$

$$(b). A(2\pi/3) = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Invers } A(2\pi/3) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos 240^\circ & -\sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ \end{bmatrix}$$

Jadi, Invers dari $A(2\pi/3)$ adalah $A(4\pi/3)$

$$(c). |A(2\pi/3)| = a^n = e$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a & & a & & a^2 & & a \end{matrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka $a^3 = e$ Jadi order dari $A(2\pi/3)$ adalah 3

3). Dalam $SL(2, \mathbb{Z}_{10})$, misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a). Hitung A^3 dan A^n

(b). Dapatkan order dari A

$$\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Jawab :

$$(a). \begin{matrix} A & A & A^2 & A & A^3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi, } A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^7 = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^9 = \begin{bmatrix} 1 & 18 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 22 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi, } A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b). |A| \rightarrow a^n = e = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^5 = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

maka $|A| = 5$

Jadi, ordernya adalah 5

4). Dapatkan senter $Z(S_3)$ dari grup S_3 !

Yang Komutatif terhadap semua anggota S_3 hanyalah P_0
 Karena Grup S_3 Non-abelian dan yang bersifat komutatif terhadap S_3 hanyalah P_0 .

Pembuktian :

1. Bukti P tidak komutatif terhadap semua anggota S_3

$$\left. \begin{aligned} P \cdot N_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = N_3 \\ N_1 \cdot P &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = N_2 \end{aligned} \right\} P \cdot N_1 \neq N_1 \cdot P$$

Juga dapat dibuktikan bahwa N_1 tidak komutatif terhadap semua elemen S_3 .

2. Bukti P' tidak komutatif terhadap semua anggota S_3

$$\left. \begin{aligned} P' \cdot N_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = N_3 \\ N_2 \cdot P' &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = N_1 \end{aligned} \right\} P' \cdot N_2 \neq N_2 \cdot P'$$

Juga dapat dibuktikan bahwa N_2 tidak komutatif terhadap semua anggota S_3

3. Bukti N_3 tidak komutatif terhadap semua anggota S_3

$$\left. \begin{aligned} N_3 \cdot P &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = N_1 \\ P \cdot N_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = N_2 \end{aligned} \right\} N_3 \cdot P \neq P \cdot N_3$$

Jadi, P, P', N_1, N_2, N_3 tidak komutatif terhadap semua anggota S_3

Jadi, Senter $Z(S_3)$ dari grup S_3 adalah P_0

5). Diberikan grup G dan $H \subset G$ dengan $H \neq \emptyset$. Tunjukkan bahwa H adalah Subgrup dari G bila dan hanya bila berlaku $a^{-1}b \in H$, untuk setiap $a, b \in H$. Syarat dari Subgrup adalah jika $H \subset G$, maka H juga harus memenuhi aksioma grup.

Karena $a^{-1}b \in H$, ambil $x \in H$ dan $e \in H$, maka berlaku :

$$x^{-1}e = x^{-1} \in H \quad \dots \textcircled{1}$$

Jadi, untuk semua $x \in H$, maka x^{-1} juga elemen H . Jadi dapat disimpulkan bahwa tiap anggota H punya Invers dan elemen identitas juga elemen H .

Karena $x^{-1} \in H$ dan $a^{-1}b \in H$, maka ambil $y^{-1} \in H$ dan $x \in H$

Berlaku : $(y^{-1})^{-1}x \in H$, maka $yx \in H$.

Jadi, operasi sebarang nilai x dan y akan selalu Tertutup

Karena $H \subset G$ dan G adalah grup, maka sifat asosiatif berlaku di H

Jadi, karena H memenuhi aksioma grup dan $H \subset G$. Maka

$$\underline{\underline{H < G}}$$